Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft
Jochen Weber

Integrale rationaler Funktionen

1. Integrale der Form $\int (ax+b)^n \, dx$:

Zu $f(x)=(ax+b)^n$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $F(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(ax+b)^{n+1}$ eine Stammfunktion.

Aufgaben:

1.0 Berechnen Sie die bestimmten Integrale.

1.1 $\int_0^1 (3x-2)^4 \, dx$

1.2 $\int_{-1}^0 (5-2x)^2 \, dx$

1.3 $\int_0^1 (x^2-(3x-1)^3) \, dx$

1.4 $\int_0^1 (x+1-(1-2x)^4) \, dx$

2 Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das der Graph G_f der Funktion $f(x)=\frac{1}{20}\cdot(2x-3)^4$ und die x-Achse im Intervall $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ einschließt.

2. Integrale der Form $\int \frac{1}{(ax+b)^n} \, dx$:

Zu $f(x)=\frac{1}{(ax+b)^n}=(ax+b)^{-n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ und $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 1)$ ist $F(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}$ eine Stammfunktion.

Aufgaben:

1.0 Berechnen Sie die bestimmten Integrale.

1.1 $\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^4} \, dx$

1.2 $\int_0^1 \frac{-2}{(3-2x)^2} \, dx$

1.3 $\int_0^1 \left(1-\frac{3}{(5x+2)^4}\right) dx$

Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft

Jochen Weber

1.4 $\int\limits_{-1}^{0}\left(x-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{(1-3x)^3}\right)dx$

2.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=-\frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2}$ mit $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

2.1 Zeigen Sie, dass für den Funktionsterm von f gilt: $f(x)=\frac{2}{(x+2)^2}-1$.

2.2 Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das der Graph G_f und die waagrechte Asymptote im Intervall [-1;1] einschließt.

3 Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2}-2x+5\right)dx$.

(Abitur 2021 Teil 1)

3. Uneigentliche Integrale:

Bisher wurden Flächen und damit auch Integrale über abgeschlossenen Intervallen betrachtet. Im Folgenden soll auch der Fall betrachtet werden, dass sich Flächen ins Unendliche erstrecken. Dabei soll untersucht werden, ob man solchen Flächen ein (endliches) Flächenmaß zuordnen kann.

Sei $f:[a;\infty[\to\mathbb{R}$ stetig und $z\geq a$. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z\to\infty}\int\limits_{a}^{z}f(x)dx$, so heißt er uneigentliches Integral (1. Art) über dem Intervall $[a;\infty[$ und wird kurz mit $\int\limits_{a}^{\infty}f(x)dx$ bezeichnet.

Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z\to-\infty}\int\limits_{z}^{b}f(x)dx$, so heißt er uneigentliches Integral (1. Art) über dem Intervall $]-\infty;b]$ und wird kurz mit $\int\limits_{-\infty}^{b}f(x)dx$ bezeichnet.

Schmiegt sich der Graph einer Funktion im Intervall $]\alpha;b]$ am linken Rand α an eine senkrechte Asymptote an, so definiert man:

$$\int\limits_{\alpha}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{a\to\alpha^+}\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$$

Schmiegt sich der Graph einer Funktion im Intervall $[a;\beta[$ am rechten Rand β an eine senkrechte Asymptote an, so definiert man:

$$\int\limits_{a}^{\beta}f(x)dx=\lim\limits_{b\to\beta^-}\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$$

Sofern der Grenzwert jeweils existiert, heißt er uneigentliches Integral 2. Art.

Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft
Jochen Weber

Aufgaben:

1.0 Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale.

1.1 $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)^2}$

1.2 $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^3}$

1.3 $\int_0^4 \frac{1}{x^2}dx$

2 Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das von der negativen x-Achse und den Graphen der Funktionen $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$ $(D_f=\left]-\infty;-1\right[)$ und $g(x)=x+1$ $(D_g=\mathbb{R})$ eingeschlossen wird.

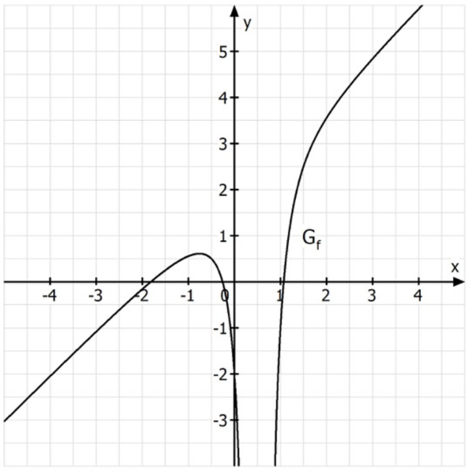
3.0 Gegeben sind die Funktionen $f(x)=\frac{1}{x^3}$ $(D_f=\left]0;\infty\right[)$ und $g(x)=\frac{3}{x^2}$ $(D_g=\left]0;\infty\right[)$.

3.1 Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g an der Stelle $x_0=\frac{1}{3}$ schneiden.

3.2 Prüfen Sie, ob die Fläche zwischen den Graphen von f und g für $x\to\infty$ ein endliches Maß besitzt.

Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft
Jochen Weber

4.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x)=\frac{4x^3+4x^2-7x-2}{(2x-1)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge D_f und der zugehörige Graph der Funktion f im abgebildeten Diagramm.



4.1 Der Graph von f, seine nichtsenkrechte Asymptote und die Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = a$ mit $a < -1$ schließen im II. und III. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche A(a) in Abhängigkeit von $a\in\mathbb{R}$.

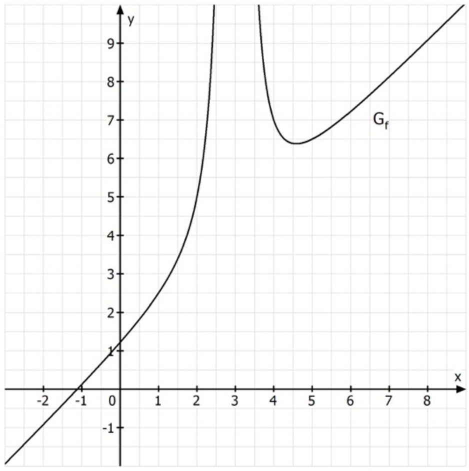
4.2 Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche für $a = -4$.

4.3 Untersuchen Sie, ob die sich ins $-\infty$-Unendliche erstreckende Fläche messbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls dessen Wert.

Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft

Jochen Weber

5.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+3x+11}{(x-3)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge D_f und der zugehörige Graph der Funktion f im abgebildeten Diagramm.



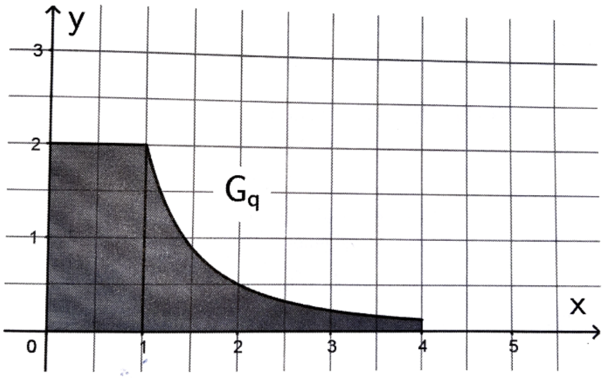
5.1 Bestimmen Sie die Gleichung der nichtsenkrechten Asymptote und zeichnen Sie diese in das Diagramm ein.

5.2 Der Graph von f, seine nichtsenkrechte Asymptote und die Geraden mit den Gleichungen x = 4 und x = a mit a > 4 schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche A(a) in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

5.3 Berechnen Sie die Flächenmaßzahl für a = 6 und untersuchen Sie, ob $\lim\limits_{a\to\infty} A(a)$ existiert und geben Sie gegebenenfalls den Wert an.

6 Die untenstehende Abbildung zeigt modellhaft den Querschnitt (grau gekennzeichnet) einer insgesamt vier Meter breiten Skateboardrampe. Die obere Begrenzungslinie des Querschnitts verläuft für $0 \leq x \leq 1$ parallel zur x-Achse und für $1 \leq x \leq 4$ entlang des Graphen der Funktion q in der Definitionsmenge D_q. Es gilt: $q: x \mapsto \frac{2}{x^2}$; $D_q = [1;4]$.

Der zugehörige Graph wird in einem kartesischen Koordinatensystem mit G_q bezeichnet. Die Koordinaten x und y sind Längenangaben in der Einheit Meter. Berechnen Sie die Maßzahl der Querschnittsfläche der abgebildeten Skateboardrampe. Der Abbildung dürfen ganzzahlige Werte entnommen werden. (Abitur 2025 Teil 1)



Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft

Jochen Weber

Lösungen

1.1 $\int_0^1 (3x-2)^4\,dx = \left[\frac{1}{5}\cdot(3x-2)^5\cdot\frac{1}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{15}\cdot(3x-2)^5\right]_0^1 = \frac{1}{15}-\left(-\frac{32}{15}\right)=\frac{33}{15}$

1.2 $\int_{-1}^0 (5-2x)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot(5-2x)^3\cdot(-\frac{1}{2})\right]_{-1}^0 = \left[-\frac{1}{6}\cdot(5-2x)^3\right]_{-1}^0 = -\frac{125}{6}-\left(-\frac{343}{6}\right)=\frac{218}{6}=\frac{109}{3}$

1.3 $\int_0^1 (x^2-(3x-1)^3\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}\cdot(3x-1)^4\cdot\frac{1}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{12}\cdot(3x-1)^4\right]_0^1 =$

$\left(\frac{1}{3}-\frac{16}{12}\right)-\left(-\frac{1}{12}\right)=-\frac{11}{12}$

1.4 $\int_0^1 (x+1-(1-2x)^4\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{5}\cdot(1-2x)^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{10}\cdot(1-2x)^5\right]_0^1 =$

$\left(\frac{1}{2}+1-\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{13}{10}$

2) Die Funktion f hat im Intervall $[0;1{,}5]$ keine Nullstellen

$\int_0^{1,5}\left(\frac{1}{20}(2x-3)^4\right)dx = \left[\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{5}\cdot(2x-3)^5\cdot\frac{1}{2}\right]_0^{1,5} = \left[\frac{1}{200}\cdot(2x-3)^5\right]_0^{1,5} =$

$0-\left(-\frac{243}{200}\right)=\frac{243}{200} \quad A=\frac{243}{200}\text{ FE}$

Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft

Jochen Weber

1.1 $\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^4}dx=\int_0^1\left[2\cdot(x+1)^{-4}\right]dx=\left[2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(x+1)^{-3}\right]_0^1=\left(-\frac{1}{12}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{12}$

1.2 $\int_0^1 \frac{-2}{(3-2x)^2}dx=\int_0^1\left[-2\cdot(3-2x)^{-2}\right]dx=\left[-2\cdot(-1)(3-2x)^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_0^1=\left[-1\cdot(3-2x)^{-1}\right]_0^1=$

$-1-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

1.3 $\int_0^1\left(1-\frac{3}{(5x+2)^4}\right)dx=\int_0^1\left[1-3\cdot(5x+2)^{-4}\right]dx=\left[x-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(5x+2)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)\right]_0^1=$

$\left[x+\frac{1}{5}\cdot(5x+2)^{-3}\right]_0^1=\left(1+\frac{1}{1715}\right)-\left(\frac{1}{40}\right)=\frac{2677}{2744}$

1.4 $\int_{-1}^0\left(x-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{(1-3x)^3}\right)dx=\int_{-1}^0\left[x-\frac{2}{3}\cdot(1-3x)^{-3}\right]dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1-3x)^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]_{-1}^0=$

$\left[x-\frac{1}{9}\cdot(1-3x)^{-2}\right]_{-1}^0=\left(0-\frac{1}{9}\right)-\left(-1-\frac{1}{144}\right)=\frac{43}{48}$

2.1 $f(x)=-\frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2}=-\frac{x^2+4x+2}{x^2+4x+4}$

$(-x^2-4x-2):(x^2+4x+4)=-1+\frac{2}{x^2+4x+4}=\frac{2}{(x+2)^2}-1$

2.2 $A=\int_{-1}^1(f(x)-(-1))dx=\int_{-1}^1\left(\frac{2}{(x+2)^2}-1+1\right)dx=\int_{-1}^1\left(\frac{2}{(x+2)^2}\right)dx=\int_{-1}^1(2\cdot(x+2)^{-2})dx=$

$\left[2\cdot(-1)\cdot(x+2)^{-1}\right]_{-1}^1=\left[-2\cdot(x+2)^{-1}\right]_{-1}^1=\left(-\frac{2}{3}\right)-(-2)=\frac{4}{3}$ FE

3 $\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-2x+5\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-x^2+5x\right]_1^2=\left(-\frac{1}{2}-4+10\right)-\left(-1-1+5\right)=2{,}5$

Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft
Jochen Weber

1.1 $\int_1^z \frac{dx}{(x+2)^2} = \int_1^z (x+2)^{-2}\,dx = \left[-1\cdot(x+2)^{-1}\right]_1^z = \left(-1\cdot(z+2)^{-1}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{z+2}+\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{z\to\infty}\left(-\frac{1}{z+2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

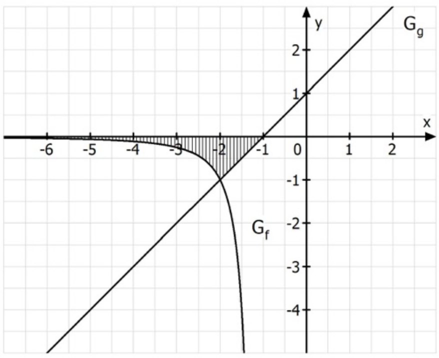
1.2 $\int_z^0 \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_z^0 (x-1)^{-3}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-2}\right]_z^0 = \left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\cdot(z-1)^{-2}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}$

$\lim\limits_{z\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}\right)=-\frac{1}{2}$

1.3 $\int_0^4 \frac{1}{x^2}dx \quad \Rightarrow \int_a^4 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^4 = -\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \lim\limits_{a\to 0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\right)\to\infty$

2)



Schnittstellen berechnen:

$f(x)=g(x) \quad \Rightarrow -\frac{1}{(x+1)^2}=x+1 \quad \Rightarrow (x+1)^3=-1 \quad \Rightarrow x+1=-1 \quad \Rightarrow x=-2$

$\int_{-\infty}^{-2} f(x)dx \quad \Rightarrow \int_z^{-2}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \int_z^{-2}\left(-(x+1)^{-2}\right)dx = \left[-1\cdot(-1)\cdot(x+1)^{-1}\right]_z^{-2} =$

$\left[(x+1)^{-1}\right]_z^{-2} = -1-(z+2)^{-1} = -1-\frac{1}{z+2}$

$\lim\limits_{z\to-\infty}\left(-1-\frac{1}{z+2}\right)=-1$

$\int_{-2}^{-1} g(x)dx = \int_{-2}^{-1}(x+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{-1} = \left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(2-2\right) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow A = 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ FE

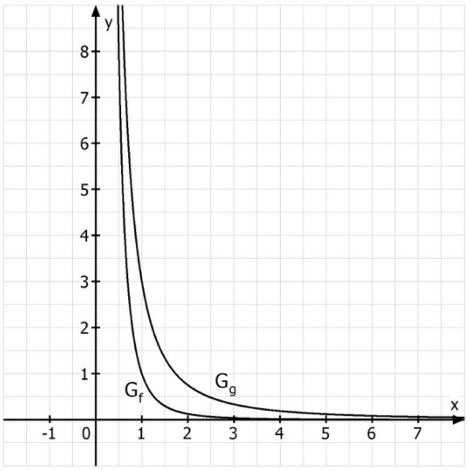
Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft
Jochen Weber

3.1

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=27 \qquad g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=27$$

$\Rightarrow$ Die Funktionen f und g schneiden sich bei $x_0=\frac{1}{3}$

3.2



$$\int_{\frac{1}{3}}^{z}(g(x)-f(x))\,dx=\int_{\frac{1}{3}}^{z}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\int_{\frac{1}{3}}^{z}\left(3\cdot x^{-2}-x^{-3}\right)dx=$$

$$\left[3\cdot(-1)\cdot x^{-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-2}\right]_{\frac{1}{3}}^{z}=\left[-3\cdot x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}\right]_{\frac{1}{3}}^{z}=$$

$$\left(-3\cdot z^{-1}+\frac{1}{2}\cdot z^{-2}\right)-\left(-9+4{,}5\right)=-\frac{3}{z}+\frac{1}{2z^2}+4{,}5$$

$$\lim_{z\to\infty}\left(-\frac{3}{z}+\frac{1}{2z^2}+4{,}5\right)=4{,}5$$

Die Fläche zwischen den Graphen von f und g für $x\to\infty$ besitzt ein endliches Maß.

Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft

Jochen Weber

4.1

$$(4x^3+4x^2-7x-2):(4x^2-4x+1)=x+2-\frac{4}{(2x-1)^2}$$

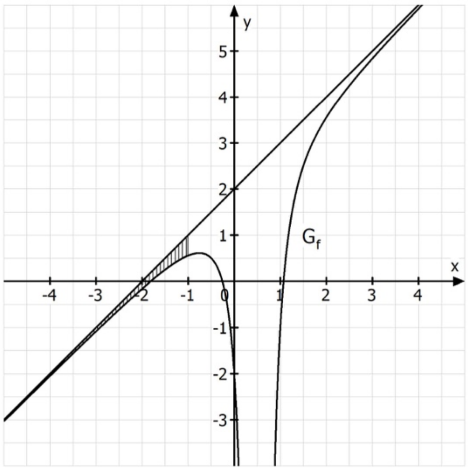
$$\Rightarrow \text{Asymptote: } y=x+2$$

$$\int_a^{-1}\left[(x+2)-(x+2-\frac{4}{(2x-1)^2}\right]dx=\int_a^{-1}\left[\frac{4}{(2x-1)^2}\right]dx=\int_a^{-1}\left[4\cdot(2x-1)^{-2}\right]dx=$$

$$=\left[4\cdot(-1)\cdot(2x-1)^{-1}\cdot\frac{1}{2}\right]_a^{-1}=\left[-2\cdot(2x-1)^{-1}\right]_a^{-1}=$$

$$=\left[-2\cdot(-3)^{-1}\right]-\left[-2\cdot(2a-1)^{-1}\right]=\frac{2}{3}+\frac{2}{2a-1}$$

$$\Rightarrow A(a)=\frac{2}{3}+\frac{2}{2a-1}$$



4.2 $A(-4)=\frac{2}{3}+\frac{2}{-9}=\frac{4}{9}$ FE

4.3 $\lim\limits_{a\to-\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{2a-1}\right)=\frac{2}{3}$

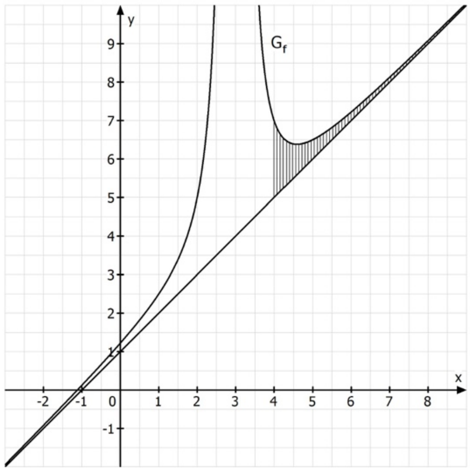
Hans-Leipelt-Schule
Staatliche Fachoberschule und Berufsoberschule Donauwörth
Technik • Sozialwesen • Wirtschaft und Verwaltung • Internationale Wirtschaft

Jochen Weber

5.1

$$(x^3-5x^2+3x+11):(x^2-6x+9)=x+1+\frac{2}{(x-3)^2}$$

Asymptote: $y=x+1$



5.2

$$\int_4^a\left[(x+1+\frac{2}{(x-3)^2}-(x+1)\right]dx=\int_4^a\left[\frac{2}{(x-3)^2}\right]dx=\int_4^a\left[2\cdot(x-3)^{-2}\right]dx=$$

$$=\left[2\cdot(-1)\cdot(x-3)^{-1}\right]_4^a=\left[-2\cdot(x-3)^{-1}\right]_4^a=\left[-2(a-3)^{-1}\right]-\left[-2\cdot1^{-1}\right]=$$

$$=-\frac{2}{a-3}+2$$

$$\Rightarrow A(a)=2-\frac{2}{a-3}\text{ FE}$$

5.3

$$A(6)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\text{ FE}$$

$$\lim_{a\to+\infty}\left(2-\frac{2}{a-3}\right)=2$$

6

$$A = 1\cdot 2 + \int_1^4 \frac{2}{x^2}\,dx = 2 + \int_1^4 2\cdot x^{-2}\,dx = 2 + \left[2\cdot(-x)^{-1}\right]_1^4 =$$

$$= 2 + \left[-\frac{2}{x}\right]_1^4 = 2 + \left[(-0,5) - (-2)\right] = 2 + 1,5 = 3,5$$